

I. *Tentaminis de Mensura & Motu aquarum fluentium, præcedente Transactionum Numero communicati, pars reliqua; Auctore Jacobo Jurin, M. D. Soc. Reg. & Colleg. Medic. Londinenf. Sodale.*

De Resistentia partium aquæ inter se, ex defectu lubricitatis oriunda.

PRIUSquam ulterius progrediamur, expendenda est ea *Resistentia* fluidorum, quæ oritur ex motu partium eorundem inter se, quamque *Newtono* auctore vocamus *Resistentiam* ex defectu lubricitatis oriundam.

Hanc ille duplicem statuit, alteram quæ oritur ex tenacitate fluidi, alteram quæ fit attritu, seu affricu mutuo partium fluidi inter se.

Priorem, data superficie, uniformem esse censet, seu effectum edere tempori proportionalem; & favent experimenta: posteriorem opinatur augeri in ratione velocitatis, vel ratione paulo minori. Sed de hac nihil diserte statuit, cum desint idonea experimenta.

Diversam autem rationem inter se invicem obtinent hæ duæ Resistentiæ, non solum pro diversitate fluidi, quum oleo, ex. gr. aut sevo liquefacto major insit tenacitas quam aquæ, minor attritus; sed etiam in fluido eodem, pro diversa velocitate qua moventur partes fluidi inter se. In dato autem fluido datur necessario certa aliqua velocitas, ubi pares inter se invicem sint hæ resistentiæ; & si istam velocitatem experimento reperire liceret, posset in aliis quibuscunque velocitatibus earundem proportio determinari. Experimenta vero nulla habemus, quod sciam, nec facile est ulla excogitare, quorum ope cognosci queat ista velocitas, quæ cæteris pro fundamento inservire possit.

I

Suspi-

Susplicamur quidem, immo pro verisimili habemus non una de causâ, quamminimam in aqua esse velocitatem istam fundamentalem, ubi resistentiæ ex tenacitate & ex affricu oriundæ æquales sunt inter se. Hoc autem concessio, cum crescente velocitate crescat pariter resistentia ex affricu, nullatenus vero crescat resistentia ex tenacitate, patet ultimam hanc resistentiam non nisi parvam admodum rationem obtinere ad priorem, ubi partes fluidi notabili aliqua velocitate moventur inter se; & proinde tuto negligi posse.

Cæterum, siue hac neglecta, alteram solam resistentiam, quæ ex affricu oritur, siue utramque comprehendendi oporteat nomine *Resistentiæ* ex defectu lubricitatis oriundæ, leges certe, quibus crescat aut minuat hęc *Resistentia*, non nisi ab experientia sunt petendæ. Sequentes itaque crescendi leges cum ei tribuimus, etsi post diligentem experimentorum hætenus factorum considerationem, magnam veri similitudinem habere videantur, id tamen eo animo facimus, ut si quid certius docuerint experimenta in posterum instituenda, sententiam non inviti mutemus.

HYPOTHESIS.

Resistentia, quæ oritur ex defectu lubricitatis aquæ, est in ratione composita ex tribus sequentibus:

1. Ex ratione superficiæ partium quæ moventur. Hoc, puto, admittunt omnes Philosophi.

2. Ex ratione velocitatis relativæ, qua moventur partes aquæ inter se. Hoc a reliquis, ni fallor, admittitur, nec multum dissentit *Newtonus*.

3. Ex ratione subduplicata altitudinis aquæ. Id nos adsumimus, duce experientia, & aliquatenus etiam auctore

auctore *Newtono*, qui censet majori pressione fieri attritum partium fortiolem, & separationem ab invicem difficiliorem. *Princip. Lib. II. Prop. LII. Schol.*

PROBLEMA VIII.

Exponere resistantiam partium Cataractæ, quæ oritur ex defectu lubricitatis.

Sit r radius foraminis, A altitudo Cataractæ, y radius cujuslibet sectionis horizontalis, x altitudo Cataractæ supra istam sectionem, z radius circuli cujusvis in ista sectione, v velocitas aquæ in centro foraminis.

Erit modo $\frac{v x^{\frac{1}{2}}}{A^{\frac{1}{2}}}$ velocitas aquæ in centro sectionis, cui radius y . Nam velocitas in centro sectionis eadem est ac si sectio ista esset foramen in fundo vasis decurtati, cui altitudo x ; adeoque est ut $x^{\frac{1}{2}}$ per Corollarium Probl. VI. Erit etiam $\frac{y-z}{y} \times \frac{v x^{\frac{1}{2}}}{A^{\frac{1}{2}}}$ velocitas aquæ in circumferentia circuli, cui radius z ; $\frac{z v x^{\frac{1}{2}}}{y A^{\frac{1}{2}}}$ velocitas relativa; $2 m z \dot{x}$ superficies cylindri nascentis, cui radius z , altitudo \dot{x} ; eritque per tres nostras positiones, *Resistentia* superficiæ hujus cylindri, ut $2 m z \dot{x} \times \frac{z v x^{\frac{1}{2}}}{y A^{\frac{1}{2}}} \times x^{\frac{1}{2}} = \frac{2 m v x x z z}{y A^{\frac{1}{2}}}$.

Considerentur jam \dot{x} , x , & y ut quantitates constantes, dum fluit z usque donec evadit æqualis ipsi y ;
I z
&

& erit fluxionis $\frac{2m\dot{v}xxz}{yA^{\frac{1}{2}}}$, quantitas fluens
 $\frac{2m\dot{v}xxz^2}{2yA^{\frac{1}{2}}}$, five $\frac{m\dot{v}xxz^2}{yA^{\frac{1}{2}}}$, five, (ponendo $z=y$)
 $\frac{m\dot{v}xx}{A^{\frac{1}{2}}}$, ut resistentia cylindri nascentis, cui radius
 y , altitudo x .

Sed per proprietatem curvæ *Cataracticæ*, $y^4x=r^4A$,
 & $yx^{\frac{1}{4}}=rA^{\frac{1}{4}}$: unde *Resistentia* cylindri hujus na-
 scentis erit ut $\frac{m\dot{v}xxrA^{\frac{1}{4}}}{A^{\frac{1}{2}}x^{\frac{1}{4}}}$, five ut $\frac{m\dot{v}rx^{\frac{3}{4}}}{A^{\frac{1}{4}}}$; &
Resistentia totius *Cataractæ* erit ut hujus fluxionis
 quantitas fluens, five ut $\frac{m\dot{v}rx^{\frac{7}{4}}}{A^{\frac{1}{4}}} \times \frac{4}{7}$, five, ponendo
 $x=A$, ut $\frac{4}{7}m\dot{v}rA^{\frac{3}{2}}$. Et cum per *Problema* IV.
 sit $v=3qV$, erit *Resistentia* in *Cataracta*, ut
 $\frac{12qmVrA^{\frac{3}{2}}}{7}$, five ut $qVrA^{\frac{3}{2}}$. Q.E.I.

COROLL. Cum sit V ut \sqrt{A} , erit *Resistentia* in
Cataracta, ut qrA^2 .

SCHOLIUM.

In solutione modo exposita, pro superficie taleolæ
Cataracticæ, cui radius z , secundum quam particulæ
 aqueæ se mutuo præterfluunt velocitate relativa æqua-
 bili, adhibuimus superficiem cylindri nascentis, cui
 radius z , altitudo x , five superficiem $2mzx$, cum
 revera ejus taleolæ superficies sit $2mz \times \sqrt{x^2 + z^2}$.

Id autem si corrigatur, invenietur *Resistentia* superficiei hujus taleolæ ut $2 m z \sqrt{x^2 + z^2} \times x^{\frac{1}{2}} \times \frac{z v x^{\frac{1}{2}}}{y A^{\frac{1}{2}}}$

$$= \frac{2 m v x z z \sqrt{x^2 + z^2}}{y A^{\frac{1}{2}}}.$$

Cumque, per *Scholium 2. Problematis II.* subtangens curvæ *Cataracticæ* sit $4x$, & tangens ipsa $\sqrt{16x^2 + z^2}$, erit $4x : \sqrt{16x^2 + z^2} :: x : \sqrt{x^2 + z^2}$.

$$= \frac{x \sqrt{16x^2 + z^2}}{4x}.$$

Itaque *Resistentia* superficiei taleolæ erit ut

$$\frac{2 m v x z z}{y A^{\frac{1}{2}}} \times \frac{x}{4x} \sqrt{16x^2 + z^2} = \frac{m v x}{2 y A^{\frac{1}{2}}} z z \sqrt{16x^2 + z^2}$$

$$= \frac{m v x z z}{2 y A^{\frac{1}{2}}} \text{ in } 4x + \frac{z^2}{2 \times 4x} - \frac{z^4}{8 \times 4x^3} + \frac{z^6}{16 \times 4x^5}$$

$$- \frac{5z^8}{128 \times 4x^7} + \frac{7z^{10}}{256 \times 4x^9} \text{ \&c. } = \frac{m v x}{2 y A^{\frac{1}{2}}} \text{ in } 4x z z$$

$$+ \frac{z z^3}{2 \times 4x} - \frac{z z^5}{8 \times 4x^3} + \frac{z z^7}{16 \times 4x^5} - \frac{5 z z^9}{128 \times 4x^7}$$

$$+ \frac{7 z z^{11}}{256 \times 4x^9} - \frac{21 z z^{13}}{1024 \times 4x^{11}} \text{ \&c. }$$

Habendo autem quantitates x, z , & y pro constantibus, hujus fluxionis fluens erit, $\frac{m v x}{2 y A^{\frac{1}{2}}} \text{ in } \frac{4x z^2}{2}$

$$+ \frac{z^4}{8 \times 4x} - \frac{z^6}{48 \times 4x^3} + \frac{z^8}{8 \times 16 \times 4x^5} - \frac{z^{10}}{256 \times 4x^7}$$

$$+ \frac{7 z^{12}}{12 \times 256 \times 4x^9} - \text{\&c.}$$

Et

Et ponendo $z=y$, erit hæc fluens $\frac{m v x}{2 A^{\frac{1}{2}}}$ in $2 x y$
 $+\frac{y^3}{8 \times 4 x} - \frac{y^5}{48 \times 4 x^3} + \frac{y^7}{8 \times 16 \times 4 x^5} - \frac{y^9}{256 \times 4 x^7}$
 $+\frac{7 y^{11}}{12 \times 256 \times 4 x^9} - \&c.$ quæ erit ut *Resistentia* in
 taleola Cataractica, cui radius y , altitudo x .

Hæc autem est ut fluxio *Resistentiæ* in tota *Cataracta*,

& ponendo $y = \frac{r A^{\frac{1}{4}}}{x^{\frac{1}{4}}}$, fit $\frac{m v x}{2 A^{\frac{1}{2}}}$ in $\frac{2 r x A^{\frac{1}{4}}}{x^{\frac{1}{4}}}$

$+\frac{r^3 A^{\frac{3}{4}}}{8 \times 4 \times x^{\frac{7}{4}}} - \frac{r^5 A^{\frac{5}{4}}}{48 \times 4^3 \times x^{\frac{17}{4}}} + \frac{r^7 A^{\frac{7}{4}}}{8 \times 16 \times 4^5 \times x^{\frac{27}{4}}}$
 $-\frac{r^9 A^{\frac{9}{4}}}{256 \times 4^7 \times x^{\frac{37}{4}}} + \&c. = \frac{m v r}{2 A^{\frac{1}{4}}} \text{ in } 2 x x^{\frac{3}{4}} + \frac{r^2 A^{\frac{1}{2}} x x^{\frac{-7}{4}}}{32}$
 $-\frac{r^4 A x x^{\frac{-17}{4}}}{48 \times 4^3} + \frac{r^6 A^{\frac{3}{2}} x x^{\frac{-27}{4}}}{8 \times 16 \times 4^5} - \&c.$ Hujus autem fluxi-

onis quantitas fluens est $\frac{m v r}{2 A^{\frac{1}{4}}} \text{ in } 2 x^{\frac{7}{4}} x^{\frac{4}{7}} + \frac{r^2 A^{\frac{1}{2}} x^{\frac{3}{4}}}{32} x^{-\frac{4}{3}}$

$-\frac{r^4 A x^{\frac{-13}{4}}}{48 \times 4^3} x^{-\frac{4}{13}} + \frac{r^6 A^{\frac{3}{2}} x^{\frac{-23}{4}}}{8 \times 16 \times 4^5} x^{-\frac{4}{23}} - \&c.$ Hæc au-

tem, ponendo $x=A$, fit $\frac{m v r}{2} \text{ in } \frac{8 A^{\frac{2}{2}}}{7} - \frac{r^2}{3 \times 8 A^{\frac{1}{2}}}$

$+\frac{r^4}{12 \times 13 \times 4^3 A^{\frac{5}{2}}} - \frac{r^6}{32 \times 23 \times 4^5 A^{\frac{9}{2}}} + \&c.$ five,

$\frac{4 m v r A^{\frac{3}{2}}}{7} \text{ in } 1 - \frac{7 r^2}{3 \times 4^3 A^2} + \frac{7 r^4}{6 \times 13 \times 4^5 A^4} - \frac{7 r^6}{23 \times 4^9 A^6} +$

&c. quæ est ut *Resistentia* per totam *Cataractam*.

Quod

Quod si altitudo pro infinita habeatur respectu diametri foraminis, erit *Resistentia* ut $\frac{4mvrA^{\frac{3}{2}}}{7}$, prorsus uti definitum est in solutione priori.

Si $A=1$ or, *Resistentia* erit ut $\frac{4mvrA^{\frac{3}{2}}}{7} \times 1 - \frac{1}{2743}$ circiter.

Si $A=4$ r, *Resistentia* erit ut $\frac{4mvrA^{\frac{3}{2}}}{7} \times 1 - \frac{1}{439}$ circiter.

Potest itaque usurpari $\frac{4mvrA^{\frac{3}{2}}}{7}$ pro mensura *Resistentiæ*, absque periculo sensibilis erroris, etiam ubi altitudo aquæ non superat duas diametros foraminis, & multo magis in altitudine longe majori.

PROBLEMA IX.

Data Mensura aquæ effluentis per datum foramen circulare in medio fundo vasis cylindrici datæ altitudinis, definire Mensuram aquæ effluentis ex alio vase cujuscunque altitudinis datæ per foramen circulare quodcunque datum.

Sit r radius foraminis dati, A altitudo data, $2qmr^2A$ data *Mensura* aquæ effluentis illo tempore, quo casurum in vacuo sit corpus grave per altitudinem A .

Hinc erit, per *Problema IV.* $3q^2mr^2AV$ *Motus* aquæ eodem tempore effluentis: eritque, per *Corollarium Problematis IV.* *Motus* eodem tempore per *Resistentiam* deperditus, $mr^2AV \times 1 - 3q^2$. Hunc itaque
Motum

Motum vis æqualis *Resistentiæ* generare potest eodem tempore.

Sunt autem *Motus* eodem temporis spatio generati viribus eisdem generantibus proportionales.

Itaque *Motus* $mr^2 AV$, quem hoc tempore generare potest, per *Problema* I. pondus columnæ aqueæ $mr^2 A$, cum abest omnis *Resistentia*, est ad *Motum* $mr^2 AV \times \frac{1-3q^2}{1}$, quem eodem tempore generare potest *Resistentia*, ut pondus $mr^2 A$, ad ipsam *Resistentiam*. Unde *Resistentia* $= mr^2 A \times \frac{mr^2 AV \times \frac{1-3q^2}{1}}{mr^2 AV}$
 $= mr^2 A \times \frac{1-3q^2}{1}$.

Eodem modo, ponendo s & E pro radio foraminis, & altitudine novi vasis, & $2pm s^2 E$ pro *Mensura* aquæ effluentis eodem tempore, quo casurum sit in vacuo corpus grave per altitudinem E , habebis *Resistentiam* in novo vase $= ms^2 E \times \frac{1-3p^2}{1}$.

Sed per *Corollarium Problematis* VIII. sunt ad invicem hæ duæ *Resistentiæ* ut $qr A^2$ ad $ps E^2$.

Itaque, $mr^2 A \times \frac{1-3q^2}{1} : ms^2 E \times \frac{1-3p^2}{1} :: qr A^2 : ps E^2$, sive $r \times \frac{1-3q^2}{1} : s \times \frac{1-3p^2}{1} :: q A : p E$, sive $pr E \times \frac{1-3q^2}{1} = qs A \times \frac{1-3p^2}{1}$, qua æquatione rite reducta pervenitur ad sequentem,

$$p = \sqrt{\frac{1}{3} + \frac{r E \times \frac{1-3q^2}{1}}{6 q s A}}^2 - \frac{r E \times \frac{1-3q^2}{1}}{6 q s A},$$

vel ponendo $r E = n s A$,

$$p = \sqrt{\frac{1}{3} + \frac{n \times \frac{1-3q^2}{1}}{6 q}}^2 - \frac{n \times \frac{1-3q^2}{1}}{6 q}.$$

Unde

Unde habetur $p \times 2 m s^2 E$, quæ est *Mensura* aquæ effluentis ex secundo vase, quo tempore cadit in vacuo corpus grave per altitudinem E . Q. E. I.

COROLL. 1. Si diametri foraminum fuerint in ratione altitudinum aquæ, eadem erit ratio *Mensurarum*, ac si aqua efflueret sine ulla *Resistentia*.

Nam, si $r : s :: A : E$, $r E = s A$, & $n = 1$, unde $p = \sqrt{\frac{1}{3} + \frac{1 - 3 q^2}{6 q}} \min. \frac{1 - 3 q^2}{6 q}$, & per reductionem $p = q$; unde $2 q m r^2 A : 2 p m s^2 E :: 2 m r^2 A : 2 m s^2 E$, quæ est ratio *Mensurarum*, cum abest omnis *Resistentia*.

COROLL. 2. Si E pro nihilo habeatur respectu altitudinis A , habenda est etiam n pro nihilo, unde

fit $p = \frac{1}{\sqrt{3}}$. Itaque, quo minor capitur altitudo E , eo propius vergit p ad $\frac{1}{\sqrt{3}}$.

COROLL. 3. Si s pro infinite magno habeatur respectu radii r , fit $p = \frac{1}{\sqrt{3}}$. Itaque quo major capitur radius s , eo magis vergit p ad $\frac{1}{\sqrt{3}}$.

PROBLEMA X.

Aqua in aërem effluente determinare rationem inter diametrum foraminis & diametrum venæ contractæ.

Hæc ratio sine experimentorum ope determinari nequit. Est equidem, per *Problemæ VII*,

K

$e^2 =$

$$g^2 = \frac{qVr^2}{v^2} \times v + 6qV - 2\sqrt{3}qvV + 9q^2V^2 - 2v^2,$$

unde cognitris q & v definitur g .

Sed nulla, quod sciam, habemus experimenta, quibus utramque harum quantitatum q & v metiamur.

Poleni siquidem experimenta *Mensuram* aquæ effluentis exhibent, unde cognoscitur q ; sed distantiam maximam, ad quam fertur aqua ex foramine horizontaliter profiliens, sive distantiam, ad quam pergit media pars venæ, quæ velocitate v exilit, non designant.

Mariotti vero experimenta altitudinem maximam perpendicularem, ad quam profilit aqua motu sursum verso, sive altitudinem, quam attingit aqua ex media vena profiliens, metiuntur, unde cognoscitur v^2 ; sed non exhibent *Mensuram* aquæ effluentis.

Deficientibus itaque idoneis experimentis, vix licebit rationem eam, quam quærimus, nisi præterpropter determinare. Id autem fiet in modum sequentem.

In *Scholio* 2. *Problematis* VII, verisimile esse docuimus constantem esse rationem inter hos radios, aut saltem non nisi quamminimum mutari.

Constat autem ex *Mariotti* experimentis discrimen inter altitudinem, quam attingit aqua sursum exiliens, & altitudinem vasis, rationem obtinere duplicatam circiter ipsius altitudinis vasis.

Itaque, si a sit altitudo, ad quam motu sursum verso salire possit aqua fluens per axem venæ cum velocitate v ; erit ex *Mariotti* experimentis, $A-a$ ut A^2 , & erit $\frac{A^2}{A-a}$ data quantitas.

Sed in uno experimento, quod pro fundamentali habet *Mariottus*, fuit $A = 60$ digit. Parisiens. & inventa est $a = 59$ digit. Paris. diametro foraminis mediente digitum dimidium. Fuit itaque in hoc casu

$$\frac{A^2}{A-a} = 3600, \text{ cumque data sit hæc quantitas, erit}$$

$$\text{semper } 3600a = 3600A - A^2, \text{ vel } a = \frac{3600A - A^2}{3600}$$

$$= A - \frac{A^2}{3600}.$$

Ergo, si sit $A = 1$ dig. sive dupla diametri foraminis, erit $a = 1 - \frac{1}{3600}$. Sed $v^2 : V^2 :: a : A :: 1 - \frac{1}{3600} : 1$.

Itaque, cum altitudo vasis dupla est diametri foraminis, haberi potest $v^2 = V^2$, vel $v = V$.

Porro, per *Coroll. 4. Probl. IX.* decrefcente E , vergit p ad $\frac{1}{\sqrt{3}}$.

Itaque, cum sit altitudo vasis valde parva, velut si non superet duas diametros foraminis, haberi potest p vel $q = \frac{1}{\sqrt{3}}$.

Sed, per *Problema VII*,

$$e^2 = \frac{qVr^2}{v^2} \times v + 6qV - 2\sqrt{3}qvV + 9q^2V^2 - 2v^2,$$

& pro v & q substituendo valores eorundem modo inventos, sive V & $\frac{1}{\sqrt{3}}$, fit

$$e^2 = \frac{r^2}{V\sqrt{3}} \times V + 2V\sqrt{3} - 2\sqrt{V^2}\sqrt{3} + 3V^2 - 2V^2$$

$$= \frac{r^2}{\sqrt{3}} \times \frac{1 + 2\sqrt{3} - 2\sqrt{1+\sqrt{3}}}{\sqrt{3}}, \text{ five}$$

$$\rho^2 = r^2 \times 2 + \frac{1}{\sqrt{3}} - 2\sqrt{1+\sqrt{3}} = r^2 \times 0,6687553907$$

unde $\rho = r \times 0,81777466$.

Hic itaque est valor ipfius ρ , cum altitudo aquæ dupla est diametri foraminis; & cum per *Scholium 2. Problematis VII.* ρ constantem obtineat rationem ad radium foraminis, obtinebit eundem valorem in quacunque altitudine aquæ. Q. E. I.

COROLL. I. Per *Problema VII*,

$$R = \frac{\rho}{3} \times \frac{2 + r}{\sqrt{3}\rho^2 - 2r^2}, \text{ \& ex modo invento va-}$$

lore ipfius ρ , habetur $R = r \times 3,98877150$, qui est valor ipfius R , cum altitudo aquæ dupla est diametri foraminis; cumque per *Scholium 2. ejusdem Problematis*, constans habeatur ratio inter r & R , obtinebit R hunc ipsum valorem, quæcunque fuerit altitudo aquæ.

COROLL. II. Quoniam v est fere æqualis ipsi V , & q est fere $= \frac{1}{\sqrt{3}}$, ubi altitudo aquæ dupla est diametri

foraminis; erit ad hanc altitudinem aquæ, $\frac{v}{qV} = \sqrt{3}$ quamproxime. Et cum, per *Scholium 2. Problematis VII*, constans sit ratio inter v & qV , erit $\frac{v}{qV} = \sqrt{3}$, quæcunque fuerit aquæ altitudo.

PROBLEMA XI.

Aqua ex dato vase semper pleno per datum foramen in aërem effluente, & data una quavis ex tribus quantitatibus sequentibus, nempe Mensura aquæ effluentis, velocitate in axe venæ contractæ, aut altitudine, ad quam motu sursum verso salire possit media pars venæ, reliquas duas determinare.

Sit A altitudo vasis, r radius foraminis, $2 q m r^2 A$ Mensura aquæ effluentis, v velocitas in axe venæ contractæ, a altitudo, ad quam salire queat aqua effluens per axem venæ, & detur primo $2 q m r^2 A$, unde datur q .

Per Corollarium 2. Problematis X. $\frac{v}{qV} = \sqrt{3}$, unde $v = qV\sqrt{3}$. Hinc $v^2 = 3q^2V^2$. Sed $V^2 : v^2 :: A : a = \frac{v^2 A}{V^2} = \frac{3q^2V^2 A}{V^2} = 3q^2 A$.

Si secundo detur v , erit $q = \frac{v}{V\sqrt{3}}$, &

$$2 q m r^2 A = \frac{2 m r^2 A v}{V\sqrt{3}}.$$

$$\text{Porro } a = \frac{v^2 A}{V^2}.$$

Postremo, si detur a , cum sit $a = 3q^2 A$, erit $q^2 = \frac{a}{3A}$;

$$\& q = \sqrt{\frac{a}{3A}}.$$

Item $v^2 = \frac{aV^2}{A}$, unde $v = V\sqrt{\frac{a}{A}}$. Q.E.D.

PRO-

PROBLEMA XII.

Data altitudine, ad quam motu sursum verso salit aqua per aërem erumpens ex vase altitudinis datæ per datum foramen circulare, definire altitudinem, ad quam aqua motu sursum verso ascensura sit, cum erumpit ex vase cujuscunque altitudinis datæ per foramen circulare quodcunque datum.

Significentur literis, r, s, A, E, q, p , res eædem atque in *Problemate IX*; sintque a & e altitudines, ad quas salire queat aqua erumpens ex vasis, quibus altitudines A & E respective.

Erit jam, per *Problema XI*, $a = 3q^2 A$, $e = 3p^2 E$, unde $3q^2 = \frac{a}{A}$, $1 - 3q^2 = \frac{A-a}{A}$, $q = \sqrt{\frac{a}{3A}}$, $p = \sqrt{\frac{e}{3E}}$, & $p^2 = \frac{e}{3E}$.

Cumque, per *Problema IX*, fit

$$p = \sqrt{\frac{1}{3} + \frac{rE \times \sqrt{1 - 3q^2}}{6qsA}} - \frac{rE \times \sqrt{1 - 3q^2}}{6qsA}, \text{ vel}$$

$$\text{ponendo } rE = nsA, p = \sqrt{\frac{1}{3} + \frac{n \times \sqrt{1 - 3q^2}}{6q}} - \frac{n \times \sqrt{1 - 3q^2}}{6q};$$

hinc substituendo $\frac{A-a}{A}$ pro $1 - 3q^2$, & $\sqrt{\frac{a}{3A}}$ pro q , ac pro $A-a$ scribendo α , evadet

$$p = \frac{\sqrt{4Aa + n^2\alpha^2} - n\alpha}{2\sqrt{3Aa}}, \text{ \&}$$

$$p^2 = \frac{2Aa + n^2\alpha^2 - n\alpha\sqrt{4Aa + n^2\alpha^2}}{6Aa}.$$

Sed

$$\text{Sed } p^2 = \frac{e}{3E}, \text{ unde } \frac{e}{E} = \frac{2Aa + n^2\alpha^2 - n\alpha\sqrt{4Aa + n^2\alpha^2}}{2Aa}$$

$$\text{five } e = E \times \frac{2Aa + n^2\alpha^2 - n\alpha\sqrt{4Aa + n^2\alpha^2}}{2Aa}, \text{ unde}$$

$$\text{scribendo } \varepsilon \text{ pro } E - e, \text{ fit } \varepsilon = \frac{nE\alpha}{2Aa} \times \sqrt{4Aa + n^2\alpha^2} - n\alpha.$$

Data autem ε , five $E - e$, datur e , five altitudo ad quam aqua fertur, cum ex novo vase erumpit. Q. E. I.

COROLL. 1. Si æqualia fuerint foramina in utroque vase, seu $s = r$, erit $E = nA$, vel $n = \frac{E}{A}$, unde $\varepsilon = \frac{n^2\alpha}{2a} \times \sqrt{4Aa + n^2\alpha^2} - n\alpha$.

COROLL. 2. Si æquales fuerint vasorum altitudines, seu $E = A$, erit $r = ns$, seu $n = \frac{r}{s}$, unde

$$\varepsilon = \frac{n\alpha}{2a} \times \sqrt{4Aa + n^2\alpha^2} - n\alpha.$$

COROLL. 3. Si diametri foraminum fuerint in ratione altitudinum, salient aquæ ad altitudines ipsis vasorum altitudinibus proportionales. Nam, si $r : s ::$

$$A : E, \text{ r } E = sA, \text{ \& } n = 1, \text{ unde } \varepsilon = \frac{E\alpha}{A}, \text{ seu}$$

$$\varepsilon : \alpha :: E : A, \text{ vel } E - e : A - a :: E : A, \text{ five}$$

$$e : a :: E : A.$$

COROLL. 4. Cum fit $p \times 2\sqrt{3Aa} = \sqrt{4Aa + n^2\alpha^2} - n\alpha$, erit $\varepsilon = \frac{nE\alpha}{2Aa} \times 2p\sqrt{3Aa} = \frac{pnE\alpha\sqrt{3}}{\sqrt{Aa}}$, unde pro \sqrt{a}

substituendo ejus valorem suprapositum, $q\sqrt{3A}$, & reductione debita, fit $\varepsilon = \frac{pnE\alpha}{qA}$, five $\varepsilon = \frac{prE^2\alpha}{qsA^2}$.

COROLL.

COROLL. 5. Hinc autem ponendo $p=q$, $\varepsilon = \frac{rE^2\alpha}{sA^2}$,
 five $\varepsilon : \alpha :: rE^2 : sA^2$. Hoc est, defectus altitudi-
 num aquarum salientium, five discrimina inter alti-
 tudines salientium, & altitudines vasorum, sunt in
 ratione composita ex ratione duplicata altitudinum
 vasorum directe, & ratione diametrorum foraminum
 reciprocé. Hæc autem regula accuratè vera est, ubi
 $sA=rE$, per *Coroll. 1. Probl. IX*; & proxime ad
 verum accedit, ubi E & s in eadem circiter ratione
 augentur, vel minuuntur; nec nisi paulum aberrat a
 vera aquæ salientis altitudine in quocunque casu,
 modo E non sit major pedibus 50, & eodem tempore
 s non sit minor lineis 3.

COROLL. 6. Ubi $s=r$, $\varepsilon = \frac{E^2\alpha}{A^2}$ circiter, hoc est,
 ubi paria sunt foramina, defectus altitudinum aqua-
 rum salientium sunt fere in ratione duplicata altitu-
 dinum vasorum, quæ est ipsa *Mariotti* regula.

COROLL. 7. Ubi $E=A$, $\varepsilon = \frac{r\alpha}{s}$ circiter, hoc est,
 ubi pares sunt altitudines vasorum, defectus aquarum
 salientium sunt fere ut diametri foraminum reci-
 procè.

SCHOLIUM GENERALE I.

Theoriæ supradictæ fidem si quis experimentis
 instituendis explorare voluerit, ei auctor sim,

1. Vase uti amplissimo, saltem in parte superiori,
 eum in finem ut toto tempore, quo capitur experi-
 mentum, altitudo aquæ ad sensum non mutetur.
 Quod

Quod si vas ita amplum non sit, quin durante effluxu ex foramine decrementum altitudinis aquæ notatu dignum reperiatur, habenda est pro constanti altitudine altitudo debita inter maximam & minimam aquæ altitudinem; quod fieri præstat, quam motum aquæ naturalem perturbare affundendo desuper aquam novam.

2. Vasis altitudo tanta sit, ut si aquam per foramen in latere factum emittere velis, velocitas aquæ per centrum foraminis exituræ tuto haberi possit pro velocitate quacum aqua per totum foramen exitura sit, cum abest omnis resistentia.

3. Lamina, in quo sit foramen, tam tenuis sit, aut saltem acie tam tenui in ambitu foraminis, ut ejus aciei crassities pro nihilo haberi possit respectu diametri foraminis. Debet autem recidi crassities laminæ facie externa, relicta plana facie interiore proxime aquam: & angulum hujus aciei tam acutum esse oportet, ut aqua per foramen effluens lateri exteriori laminæ non adhærescat.

His paratis sequentia institui poterunt experimenta, quibus quasi totidem criteriis de certitudine doctrinæ suprapositæ dijudicari queat.

EXPERIMENTUM I. Cum aqua per foramen in latere vasis emittitur, mensuretur diligentissime diameter venæ contractæ, notando utrum semper sibi constet mutata utcunque altitudine aquæ.

EXPER. 2. Observetur etiam utrum hæc diameter eandem semper obtineat rationem ad diametrum foraminis, cum foramina diversæ magnitudinis usurpantur.

EXPER. 3. Aqua effluente vel recta deorsum per fundum vasis, vel horizontaliter per latus ejusdem,

observetur accuratissime quantum effluat dato tempore, adhibendo diversas altitudines aquæ, sed unum idemque foramen.

EXPER. 4. Idem observetur, cum foramina diversæ magnitudinis usurpantur, sed eadem adhibetur altitudo aquæ.

EXPER. 5. Observandum quantum effluat dato tempore in casibus duobus diversis, quorum in utroque eadem sit ratio diametri foraminis ad altitudinem aquæ. Nam si *Mensuræ* reperientur in ratione composita ex ratione duplicata diametrorum, & ratione simplici altitudinum, ut in *Coroll. 3. Problematis IX*, magnam habebis Theoriæ nostræ confirmationem.

EXPER. 6. In iisdem duobus casibus, motu aquæ sursum verso ope tubi ampli lateri vasis adaptati, & superiori parte foramine pertusi, observetur ad quantas altitudines aqua saliat. Nam si reperientur hæ altitudines proportionales altitudinibus aquæ in vase, ut in *Corollario 3. Problematis XII*, habebis alteram hujus Theoriæ certissimam confirmationem.

EXPER. 7. Eodem manente foramine, sed mutata utcunque altitudine aquæ, observandum ad quantam altitudinem feratur aqua.

EXPER. 8. Idem observetur, cum eadem persistente altitudine aquæ mutatur foraminis magnitudo.

Cæterum, ex omnibus his experimentis præferenda sunt ea, quibus motu aquæ sursum verso notatur altitudo ad quam aqua salit. Hæc enim altitudo & facilius longe capi potest, quam *Mensura* aquæ effluentis, & error, si quis forte admittatur in capienda altitudine, longe minoris est momenti, quam qui admittitur in *Mensura* æstimanda. Cum enim, per

Pro-

Problema XI, altitudo aquæ salientis sit $3q^2 A$, patet, quod error minimus admissus in *Mensura*, sive in q , duplicabitur fere in q^2 , adeoque duplicabitur in altitudine aquæ salientis.

At minimus error admissus in altitudine aquæ salientis, sive in $3q^2 A$, redigitur fere ad dimidium in æstimanda q , hoc est, in *Mensura* aquæ effluentis.

SCHOLIUM GENERALE II.

Interim, dum ab iis, quibus otium non minus quam veri cognoscendi studium suppetit, fiant aliquando ista experimenta, utendum, quantum fieri potest, iis experimentis quæ nobis suppeditavit antecessorum diligentia.

Hæc autem sunt triplicia. Nam metiuntur vel,

1. Diametrum venæ contractæ; vel,
2. *Mensuram* aquæ effluentis; vel,
3. Altitudinem ad quam aqua salit.

1. Venæ contractæ radius mensurante *Newtono* est $r \times 0,84$, cum diameter foraminis est $\frac{1}{8}$ digiti *Londinensis*.

Idem *Poleno* dimetiente est $r \times 0,78$ circiter, cum diameter foraminis est digitorum *Parisiensium* $2\frac{1}{6}$.

Per calculum nostrum est $r \times 0,818$ fere, quæcunque fuerit diameter foraminis. Quæ magnitudo est intermedia circiter inter mensuram *Newtonianam* & *Polenianam*.

2. Perincommode accidit, ut *Mensuræ* aquæ effluentis ab omnibus captæ, præter unum *Polenum*, ad propositum nostrum penitus sint inutiles. Nam docente viro illo eximio, hæc *Mensura*, cum per tubum exit aqua, longe major est quam cum exit ex nudo

foramine. Et cum foramina in laminis facta pro tubis brevibus habenda sint, saltem nisi laminæ crassities quamminima sit respectu diametri foraminis, inde factum est, ut omnes *Mensuræ* aquæ effluentis ante illum captæ majores veris invenirentur.

Utendum ergo solis *Mensuris* a *Poleno* captis. Hæ autem, quæ quidem magno illo foramine 26 linearum captæ fuerunt, sunt numero decem, nempe ponendo corpus grave cadere in vacuo per pedes Parisienses 15, digitum 1, lineas 2, tempore minuti secundi, evadit *Mensura*

1 ^a	= 2mr ² A	× 0,5772	Quarum omnium inter-
2 ^a	.	0,5772	media est 2mr ² A
3 ^a	.	0,5731	fere. Hanc itaque habe-
4 ^a	.	0,5710	mus pro <i>Mensura Polen-</i>
5 ^a	.	0,5690	<i>ana</i> aquæ effluentis, cum
6 ^a	.	0,5675	vasis altitudo est digitorum
7 ^a	.	0,5689	33 <i>Parisiensium</i> , quæ est
8 ^a	.	0,5703	altitudo intermedia inter
9 ^a	.	0,5732	eas quæ <i>Poleno</i> fuerunt
10 ^a	.	0,5613	usurpatæ.
			5,7087

Mensura autem, quæ ad hanc altitudinem calculo nostro elicitur ex fundamentali *Mariotti* experimento, quod mox proponemus, est 2mr² A × 0,5768; quæ parte circiter nonagesima octava superat *Mensuram Polenianam*. Tantulum vero discrimen oriri potuit vel ex errore centesimæ partis digiti in æstimanda dia-

^a Polenus de Castellis, art. 35, 38, 39, 42, 43. & Epistol. ad Mari-
nonium.

metro foraminis; vel ex eo, quod vas excipiens aquam effluentem, centesima circiter parte majus esset quam pro computo *Poleni*; vel partim ex utroque. Adde, quod duplo minus est hoc discrimen, quam quantum reperitur inter ipsa experimenta *Poleniana*.

3. Supra docuimus inutilia reddidisse *Polenum* omnia antecessorum experimenta de *Mensura* aquæ effluentis, quod in iis instituendis nulla habita fuisset ratio crassitie laminæ, per cujus foramen aqua efflueret. Unde possit aliquis non absurde suspicari, laborare pari vitio etiam illa experimenta, quibus exploratum fuerat ad quantam altitudinem aquæ salirent. Sed dubitationem istam altera egregia observatione sustulit *Polenus*. Is siquidemprehendit *Mensuram* quidem aquæ longe majorem ex tubo, quam ex nudo foramine effluere; at, quod mireris, quodque nos forsitan, si modo Deus vitam & otium concefferit, aliquando explicabimus, aquam effluentem per tubos 7^a vel 13 lineas Parisienses longos, non nisi ad eandem, aut etiam tantillo minorem profilire distantiam horizontalem, quam attingit aqua ex nudo foramine exiliens. Tantillo itaque minor est velocitas maxima aquæ post exitum e tubo, quam post exitum e foramine, cum tubus non admodum brevis est: sed cum tubus est brevissimus, qualis est foramen etiam in lamina non admodum tenui, eadem haberi potest velocitas maxima aquæ post exitum ex hoc tubo, atque post exitum ex foramine in lamina tenuissima.

Itaque, ad explorandam Theoriæ nostræ certitudinem, licet æque nobis uti experimentis *Mariotti* de

altitudine fontium salientium, atque si foramina, quibus is usus est, in laminis tenuissimis facta fuissent.

Adsumamus ergo ex ejus experimentis unum aliquod, quod pro fundamento habeatur, ad altitudinem in reliquis experimentis per *Problema* nostrum XII indagandam.

Is quidem pro experimento fundamentalis proponit istud, ubi altitudo aquæ in vase est præcise pedum 5 *Parisiensium*. At cum tantillus error, puta duarum linearum, in hoc experimento, errorem satis grandem, nempe plusquam 8 digitorum, gignat in altitudine septies majori, quali postea utitur *Mariottus*; nos illud experimentum pro fundamentalis habere malumus, in quo maxima illa adhibetur altitudo septies major priori.

Sit itaque nobis pro fundamento examinis instituendi experimentum id *Mariotti*, ubi diameter foraminis est linearum *Parisiensium* 6, & altitudo aquæ in vase est pedum *Parisiensium* 34, digitorum $11\frac{1}{2}$, sive digitorum $419\frac{1}{2}$.

Hanc ille cum altitudinem adhiberet, reperit aquam ex foramine exilientem adfurgere ad altitudinem pedum 31 digitorum 8 vel 9, hoc est, ad altitudinem digitorum $380\frac{1}{2}$.

Est itaque $A=419,5$. $a=380,5$. & $\alpha=39$ dig.

In altero experimento, ubi *E*, seu altitudo aquæ in vase est pedum 26 digiti 1, salit aqua per idem foramen teste *Mariotto* ad altitudinem pedum 24 digitorum $2\frac{1}{2}$. Prodit vero *e*, seu altitudo aquæ salientis, per *Corollarium* 1. *Problematis* XII, pedum 24, digitorum 3.

Cæterum, quo melius conferantur altitudines, quas attingere aquam salientemprehendit *Mariottus*, cum altitudinibus iis, ad quas salire debuerit ex calculo nostro, utrasque coniecimus in Tabellam I; ubi vides ita convenire calculo cum observatis, ut vix quicquam possit supra. Cumque capta sint hæc experimenta eodem foramine diametro sex linearum, altitudine sola mutata, vix potest dubitari, quin tertia nostra positio, qua *Resistentia, cæteris paribus*, est in ratione subduplicata altitudinis, recte se habeat.

TABELLA I.

Diameter foraminis 6 linearum.

Altitudo aquæ in vase	Altitudo salientis aquæ Ex Mariotto	Ex calculo
ped. dig.	ped. dig.	ped. dig.
34. 11,5	31. 8,5	31. 8,5
26. 1	24. 2,5	24. 3
24. 5	22. 10	22. 10
12. 4	12. 0	11. 11
5. 6	5. 4,75	5. 5
5.	4. 11	4. 11. 2 lin.
35. 5	32. 0	32. 1

TABELLA II.

Diameter foraminis 4 linearum.

ped. dig.	ped. dig.	ped. dig.
34. 11,5	30. 0	30. 0
24. 5	22. 8,5	21. 11
5. 6	5. 4,7	5. 4,4

TABELLA III.

Diameter foraminis 3 linearum.

ped. dig.	ped. dig.	ped. dig.
34. 11,5	28. 0	28. 0
26. 1	22.	22. 1
24. 5	22. 2	20. 11
5. 6	5. 4,7	5. 3,7

Cum loco foraminis linearum sex uteretur *Mariottus* foramine linearum quatuor, reperit aquam profilientem ex vase altitudinis supra demonstratæ, pedum 34 digit. $11\frac{1}{2}$, attingere altitudinem pedum 30. Salire debuit per *Corollarium* 2. *Problematis* XII ad pedes 30. digitos $2\frac{1}{2}$ fere.

Postea cum uteretur foramine linearum trium, aqua profiliens ex eodem vase attigit altitudinem pedum 28. Profilire debuit per idem *Corollarium* ad pedes 28, digitos 9 circiter.

Sed hæc discrimina inter altitudines ex calculo prodeuntes & eas quas observavit *Mariottus*, ex parvo errore in capiendis foraminum tantulorum diametris oriri potuerunt.

Nam si radius maximi foraminis, quem lineis tribus æqualem statuit *Mariottus*, tres lineas superaverit parte $\frac{1}{100}$ digiti *Parisiensis*; vel si radius secundi foraminis, quem lineis duabus æqualem facit *Mariottus*, parte $\frac{1}{36}$ digiti *Parisiensis* a duabus lineis defecerit; in alterutro casu saliet aqua per calculum ad altitudinem 30 pedum, prorsus uti observavit *Mariottus*.

Item, si radius minimi foraminis, parte $\frac{1}{100}$ digiti *Parisiensis* minor fuerit linea $1\frac{1}{2}$; & simul radius maximi foraminis parte $\frac{1}{100}$ digiti superet tres lineas; dabit

dabit calculus altitudinem aquæ salientis pedum 28, quantam deprehendit *Mariottus*.

Calculo autem ad hunc modum correcto, exhibent Tabellæ 2^a & 3^a altitudines *Mariotti* cum calculo nostro collatas.

Hic autem notandum est, in Tabella II. altitudinem salientis ex vase alto pedes 24. digitos 5. *Mariotto* observatam; nempe altitudinem pedum 22. dig. $8\frac{1}{2}$, item in Tab. III. altitudinem salientis ex eodem vase, nempe altitudinem ped. 22. digit. 2. altitudines, quas exhibet calculus noster, magno intervallo superare.

Sed corruptos esse *Mariotti* numeros satis constat. Nam,

1. Regula *Mariottiana* supratradita, cui satis bene convenire cum observatis ipse testatur, numeros multo minores, & satis ad calculum nostrum accedentes exhibet.

2. Fieri omnino nequit, ut aqua saliens ex foramine 4 linearum attingat altitudinem ped. 22. dig. $8\frac{1}{2}$; neque ut aqua saliens ex foramine trium linearum attingat altitudinem pedum 22. dig. 2; si quidem aqua saliens ex foramine 6 linearum non attingat nisi altitudinem ped. 22. dig. 10. quod ex analogia observationum *Mariotti* facile patebit.

3. Si vera sit altitudo ped. 22. dig. 2. in Tab. III. salit aqua erumpens ex vase alto ped. 24. dig. 5. ad majorem altitudinem, quam ubi erumpit ex vase alto ped. 26. dig. 1. quod manifeste absurdum est.

His causis adducor ut credam *Mariottum*, ubi de priori ex his experimentis verba faceret, in adversariis suis scriptum reliquisse, *Le jet de quatre lignes n' a été plus bas que d' onze pouces ou onze pouces &*

demi, *que celui dont l'ajutage étoit de six lignes*; unde transcripserit *De la Hirius, plus bas que d'un pouce ou un pouce & demi*. Facta autem hac correctione erit altitudo *Mariotto* observata 21 pedum, & digitorum 11. vel $10\frac{1}{2}$, quæ cum calculo nostro adamussim convenit.

In secundo experimento, cum erumpit aqua ex foramine tres lineas amplo, patet ex analogia salire aquam debere ad altitudinem duobus circiter pedibus minorem, quam ubi erumpit ex foramine sex linearum. Forte, loco verborum *celui de trois lignes a été plus bas que celui de six lignes* de pres de 8 pouces, scriptum fuerat *Mariotto*, plus bas que celui de six lignes *d'un pied & 8 pouces*, quod non longè distat a calculo nostro.

Id vero mirum non videbitur, ejusmodi errata contingere potuisse, si animadverteris ipsum Cl. *De la Hirium*, qui, post obitum *Mariotti*, ejus chartas imprimendas curaverit, in præfatione huic operi præfixa hæc habere. *La moitié de cet ouvrage étoit assez au net pour être imprimée: mais le reste m'a donné beaucoup de peine à rassembler sur les Memoires qui m'en ont été mis entre les mains après sa mort.*

Cæterum, omnibus perpensis, adeo bene convenit calculo nostro cum experimentis clarissimi hujus & diligentissimi observatoris, ut etiam cum *Mensura Poleniana* aquæ effluentis, cumque mensuris diametri venæ contractæ *Newtono* & *Poleno* captis, ut vix dubitandum sit quin aut vera, aut vero quamproxima sit supra exposita theoria.

Hæc autem facile extenditur ad aquam effluentem per foramen quadratum, aut rectangulare quodvis,
vel

vel etiam ad foramen annulare, quale ambit circellum Newtonianum Corollariis ultimis *Prop.* XXXVI. *Libr.* II. *Princip.* adhibitum, unde in Resistentia fluidorum continuorum ex hujus circelli contemplatione deducta plura videntur mutanda; quod in antecessum eruditos monere visum est, quo eos ad accuratius præcedentium examen excitarem.

II. *A Collection of the Observations of the Eclipse of the Sun, August 4th 1738. which were sent to the Royal Society.*

1. *An Eclipse of the Sun, observed August the 4th 1738. by Mr. George Graham and Mr. Short, FF. R. S. at Mr. Graham's House in Fleetstreet, London, by a Refracting Telescope of 12 Feet Focus, armed with a Micrometer, and by a reflecting Telescope of nine Inches focal Length.*

	h.	'	"
Beginning of the Eclipse at	9.	59.	20 A. M.
End at	11.	59.	36
Quantity of Obscuration by }	dig.	min.	
the Micrometer . . }	3.	28.	
	h.	'	"
Duration	2.	0.	16

N. B. The Person who was observing the Transit of the Sun over the Meridian, observed the End to be at the same Instant with the above Observation.