III. De Fractionibus Algebraicis Radicalitate immunibus ad Fractiones Simpliciores reducendis, deque ſummandis Terminis quarumdam Serierum æquali Intervallo a ſe diſtantibus. Auctore *Abrahamo de Moivre*, S. R. Socio.

Eruditiſſimo Viro *JOHANNI MACHIN*, Societatis Regalis Secretario, *A. de Moivre*, S. P.

MITTO tibi excerpta quædam e Chartis meis coram Regali Societate 5° Maii 1720, exhibitis, quibus eodem die manum appoſuerunt Secretarii. Pars altera harum Chartarum jam per biennium apud Cl. Præſidem repoſita fuerat; continebat autem Demonſtrationes Propoſitionum quarumdam in Libro a me Anglice emiſſo qui inſcriptus eſt, THE DOCTRINE OF CHANCES. *Pars altera continebat explanationem uberiorem Demonſtrationum quas prior levius tetigerat. Jam cum ſæpius me inſtigaſti ut ſelectas Propoſitiones quaſdam ex his Chartis deſumptas publici juris facerem, utpote exiſtimans in illis quædam reperiri quæ ad res majoris momenti quam ſit ſpeculatio ludorum applicari poſſint; huic tuo deſiderio tandem obtempero, idque eo libentius, quo mihi videor jure aliquo a Te itidem impetrare poſſe ut pulcherrima tua inventa in Publicum proferre diutius non reluctaris.* Vale.

2 Auguſt
1722.

PRO-

The Royal Society is collaborating with JSTOR to digitize, preserve, and extend access to *Philosophical Transactions (1683-1775).* www.jstor.org

PROPOSITIO I.

SI sit Fractio quælibet $\frac{1}{1 - ex + fxx - gx^3}$ &c.' *cujus Numerator sit data Quantitas, & Denominator sit Multinomium utcunque compositum ex datis,* 1, e, f, g, &c. *& indeterminata* x, *dico Fractionem supradictam ad Fractiones simpliciores reducibilem fore.*

Casus Primus.

Sit Fractio proposita $\frac{1}{1 - ex + fxx}$; finge Denominatorem $1 - ex + fxx = o$, sintque $\frac{1}{m}$, $\frac{1}{p}$ radices istius Æquationis, sive facto $xx - ex + f = o$, sint m, p, radices Æquationis novæ, fac $A = \frac{m}{m - p}$, atque $B = \frac{p}{p - m}$, & eritFractio proposita æqualis summæ $\frac{A}{1 - mx} + \frac{B}{1 - px}$.

Casus Secundus.

Sit Fractio proposita $\frac{1}{1 - ex + fxx - gx^3}$; fingatur $x^3 - exx + fx - g = o$, sintque m, p, q, radices istius Æquationis, pone $A = \frac{mm}{\overline{m - p} \times \overline{m - q}}$,

B =

$B = \frac{pp}{\overline{p-m} \times \overline{p-q}}$, $C = \frac{qq}{\overline{q-m} \times \overline{q-p}}$; & erit Fractio proposita æqualis summæ $\frac{A}{1-mx} + \frac{B}{1-px} + \frac{C}{1-qx}$.

Casus Tertius.

Sit Fractio proposita $\frac{1}{1-ex+fxx-gx^3+hx^4}$. Fingatur $x^4 - ex^3 + fxx - gx + h = o$, sintque m, p, q, s, Radius istius Æquationes, pone $A = \frac{m^3}{\overline{m-p} \times \overline{m-q} \times \overline{m-s}}$, $B = \frac{p^3}{\overline{p-m} \times \overline{p-q} \times \overline{p-s}}$, $C = \frac{q^3}{\overline{q-m} \times \overline{q-p} \times \overline{q-s}}$, $D = \frac{s^3}{\overline{s-m} \times \overline{s-p} \times \overline{s-q}}$, eritque Fractio proposita æqualis summæ $\frac{A}{1-mx} + \frac{B}{1-px} + \frac{C}{1-qx} + \frac{D}{1-sx}$.

Casus Quartus.

Sit Fractio proposita $\frac{1}{1-ex+fxx-gx^3+hx^4-kx^5}$, fingatur $x^5 - ex^4 + fx^3 - gxx + hx - k = o$, sintque m, p, q, s, t, Radices istius æquationis; pone $A =$

$\times \overline{p-s} \times \overline{p-t}$, $C = \dfrac{q^4}{\overline{q-m} \times \overline{q-p} \times \overline{q-s} \times \overline{q-t}}$, $D = \dfrac{s^4}{\overline{s-m} \times \overline{s-p} \times \overline{s-q} \times \overline{s-t}}$, $E = \dfrac{t^4}{\overline{t-m} \times \overline{t-p} \times \overline{t-q} \times \overline{t-s}}$. Eritque Fractio proposita æqualis summæ, $\dfrac{A}{1-mx} + \dfrac{B}{1-px} + \dfrac{C}{1-qx} + \dfrac{D}{1-sx} + \dfrac{E}{1-sx}$. Lex Reductionis ita uno intuitu se prodit, tamque facilis est illius continuatio ut inutile foret illam verbis explanare.

Corollarium I.

Si Radices omnes sint æquales, non poterit Fractio proposita reduci ad simpliciores.

Corollarium II.

Si Radices aliquæ sint æquales, aliæ vero inæquales, poterit reduci fractio proposita ad simpliciores; sit *v.g.* fractio proposita $\dfrac{1}{1 - exx + fxx - gx^3}$, factoque ut præscriptum est $x^3 - exx + fx - g = 0$. Sint Radices istius æquationis m, p, q, quarum m & p sint æquales: erunt fractiones simplices in quas resolvitur proposita $\dfrac{mm}{\overline{m-p} \times \overline{m-q} \times \overline{1-mx}} + \dfrac{pp}{\overline{p-m} \times \overline{p-q} \times \overline{1-px}} + \dfrac{qq}{\overline{q-m} \times \overline{q-p} \times \overline{1-qx}}$; addantur duæ priores in unam summam, & erit summa (divisis

(divisis Numeratore & Denominatore per $m-p$)

$$\frac{mp-q\times\overline{m+p}+mpqx}{\overline{m-q}\times\overline{p-q}+\overline{1-mx}\times\overline{1-px}},$$ sive

$$\frac{mm-2qm+mmqx}{\overline{m-q}|^2\times\overline{1-mx}|^2}$$ sive $$\frac{m}{\overline{m-q}\times\overline{1-mx}|^2}$$

$$-\frac{qm}{\overline{m-q}|^2\times\overline{1-mx}|^2}$$ adeoque Fractiones reductæ

erunt $$\frac{m}{\overline{m-q}\times\overline{1-mx}|^2}-\frac{qm}{\overline{m-q}^2\times\overline{1-mx}|^2}$$

$$+\frac{qq}{\overline{m-q}|^2\times\overline{1-qx}}.$$

Corollarium III.

Si Fractiones simplices in quas resolvitur Fractio proposita involvant Quantitates imaginarias, tunc quicquid est imaginarii semper destruetur per additionem duarum vel plurium fractionum numero pari sumptarum.

Corollarium IV.

Ex combinatione Fractionum simplicium, & apta limitatione Radicum, plurima suborientur Theoremata in quibus inerit concinnitas quædam minime aspernanda Ex. *g*. sit fractio proposita $\frac{1}{1-ex+fxx-gx^3+hx^4}$, factoque ut antea $x^4-ex^3+fxx-gx+h=0$. Sint m, p, q, s, Radices Æquationis, sintque Fractiones in quas resolvitur proposita, $\frac{A}{1-mx}+\frac{B}{1-px}$

+

$+\frac{C}{1-qx}+\frac{D}{1-sx}$. Ponatur $q=-m$, atque $s=-p$; addantur simul duæ priores, itemque duæ posteriores, & reducetur fractio proposita ad $\frac{m+p-mpx}{2\times\overline{m+p}\times\overline{1-mx}\times\overline{1-px}}+\frac{m+p+mpx}{2\times\overline{m+p}\times\overline{1+mx}\times\overline{1+px}}$ si vero ponatur $p=-m$, atque $s=-q$, & addantur duæ priores, itemque duæ posteriores, reducetur Fractio proposita ad $\frac{mm}{\overline{mm-qq}\times\overline{1-mmxx}}+\frac{qq}{\overline{qq-mm}\times\overline{1-qqxx}}$.

PROPOSITIO II.

Si sit Fractio quælibet cujus Numerator sit data Quantitas, & Denominator sit Trinomium vel Quadrinomium vel Quinquinomium, &c. *radicalitate non affectum & utcunque compositum ex datis,* 1, e, f, g, h, &c. *& indeterminata* x *atque dividator Numerator per Denominatorem, ut habeatur Series Infinita; dico fore ut, si sumantur Termini quilibet istius seriei æqualibus intervallis a se invicem distantibus, series infinitæ inde resultantes, summabiles futuræ sint.*

Exemplum I.

Sit Fractio proposita $\frac{1}{1-x-xx}$; reducatur illa

 ad

ad ſeriem infinitam, nempe ad $1 + x + 2xx + 3x^3 + 5x^4 + 8x^5 + 13x^6 + 21x^7 + 34x^8$ &c. ſumanturque termini omnes alterni, incipiendo a primo, itidemque ſumantur Termini omnes alterni, incipiendo a ſecundo, hincque conficiantur ſeries binæ,

Videlicet, $1 + 2xx + 5x^4 + 13x^6 + 34x^8$ &c.
$x + 3x^3 + 8x^5 + 21x^7 + 55x^9$ &c.

Fingatur Denominator Fractionis propoſitæ, $1 - x - xx = 0$, jam cum indices poteſtatum indeterminatæ x, in novis ſeriebus ſe invicem ſuperent communi differentia 2, pone $xx = z$, atque ope duarum æquationum $1 - x - xx = 0$, & $xx = z$, exterminetur x; fietque $1 - 3z + zz = 0$; jam nunc reſtituatur x, & erit $1 - 3xx + x^4 = 0$; dividatur hæc æquatio per primam, quotiens erit $1 + x - xx$; ſumantur alternatim Termini quotientis, propter Terminos alternatim ſumptos in ſerie propoſita, hincque orientur ſummæ duæ, $1 - xx$, & x; conſtituantur hæ ſummæ Numeratores Fractionum duarum quarum communis Denominator ſit $1 - 3xx + x^4$, eruntque $\frac{1 - xx}{1 - 3xx + x^4}$ & $\frac{x}{1 - 3xx + x^4}$ ſummæ reſpectivæ novarum Serierum.

Exemplum II.

Si vero deſiderentur ſummæ terminorum intervallis binis a ſe diſtantium, fiat ut prius $1 - x - xx = 0$, jam cum indices poteſtatum in novis ſeriebus ſe invicem ſuperunt communi differentia 3, ponatur $x^3 = z$, & fiet $1 - 4z - zz = 0$, atque reſtituto x, fiet $1 - 4x^3 - x^6 = 0$; dividatur $1 - 4x^3 - x^6$ per $1 - x - xx$, quotiens erit $1 + x + 2xx - x^3 + x^4$, cujus termini ordinatim ſumpti ad intervalla bina, tres conficient

conficient ſummas, videlicet, $1 - x^3$, $x + x^4$, $2xx$, quæ ſigillatim ſumptæ, erunt illæ Numeratores, trium Fractionum, quibus ſi apponatur communis Denominator $1 - 4x^3 - x^6$, erunt tres Fractiones, $\frac{1 - x^3}{1 - 4x^3 - x^6}$, $\frac{x + x^4}{1 - 4x^3 - x^6}$, $\frac{2xx}{1 - 4x^3 - x^6}$, ſummæ tres Terminorum omnium binis intervallis a ſe diſtantium, incipiendo reſpective a primo, ſecundo & tertio Termino; atque eodem methodo colligere licet ſummas terminorum ternis vel quaternis vel quinis intervallis a ſe diſtantibus, ſive denominator ſit quadrinomium, vel multinomium quodcunque ex terminis finitis compoſitum.

PROPOSITIO III.

Si dividatur Unitas per Trinomium utcunque compoſitum ex datis 1, e, f, g, &c. *& indeterminata* x; *dico Terminum quemvis Seriei ex hac diviſione reſultantis, aſſignabilem fore.*

Sit Trinomium $1 - ex + fxx$ finge $xx - ex + f = o$, ſint m & p, radices Æquationis; ſit $l + 1$ locus termini deſiderati, hoc eſt exprimat l intervallum inter primum Terminum & Terminum quæſitum, fac $A = \frac{m}{m - p}$ $B = \frac{p}{p - m}$. Et erit Terminus deſiderus $\overline{Am^l + Bp^l} \times x^l$.

Eodem modo ſi dividatur Unitas per quadrinomium $1 - ex + fxx - gx^3$, pone $x^3 - exx + fx - g = o$, ſintque m, p, q, radices Æquationis, fac $A = \frac{mm}{\overline{m - p} \times \overline{m - q}}$, $B = \frac{pp}{\overline{p - m} \times \overline{p - q}}$, $C =$

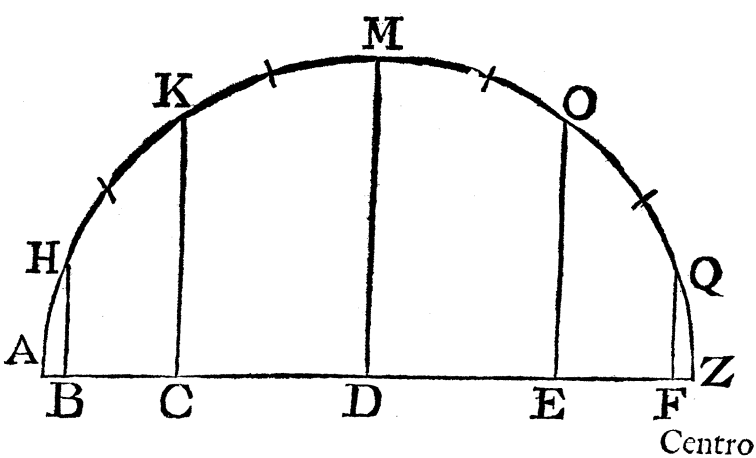
$\frac{qq}{\overline{q-m} \times \overline{q-p}}$. Et erit Terminus desideratus $\overline{Am^l + Bp^l + Cq^l} \times x^l$, & lex eadem obtinet pro multinomiis quibuscunque.

PROBLEMA.

A & B *quorum Dexteritates sint in ratione data videlicet ut* a *ad* b, *ea conditione ludant, ut quoties* A *ludum unum vicerit,* B *tradat ipsi nummum unum: quoties vero* B *vicerit,* A *tradat ipsi nummum unum: & non prius ludo desistant, quam eorum alter nummos omnes alterius lucratus fuerit; quæritur quantum probabile futurum sit ut certamen intra datum ludorum numerum* x, *vel expirante illo numero, finiatur.*

Casus Primus.

Sit *n* numerus nummorum quos uterque Collusorum habeat; sit etiam *n* numerus par, ponaturque *a* ad *b* habere rationem æqualitatis.



Centro D, Intervallo D A = 1, deſcribatur Semicircumferentia A M Z quæ dividatur in tot partes æquales quot ſunt unitates in n, tunc ex primo H, tertio K, quinto M &c. & impari quoque diviſionis termino, demittantur ad diametrum perpendicula H B, K C, M D, O E, Q F &c. ponatur $Q = \frac{HB^{x+1}}{AB^{\frac{1}{2}x+1}} - \frac{CK^{x+1}}{AC^{\frac{1}{2}x+1}} + \frac{DM^{x+1}}{AD^{\frac{1}{2}x+1}} - \frac{EO^{x+1}}{AE^{\frac{1}{2}x+1}} + \frac{QF^{x+1}}{AF^{\frac{1}{2}x+1}}$ &c. donec ſinus omnes exhauriantur: quo facto, erit probabilitas certaminis finiendi intra ludos non plures quam x, ad probabilitatem non finiendi, ut $2^{\frac{1}{2}x-1}n - Q$ ad Q, accurate.

Corollarium I.

Si ſumatur pro Q Terminus primus $\frac{HB^{x+1}}{AB^{\frac{1}{2}x+1}}$ neglectis cæteris, habebitur approximatio ſufficiens niſi forte ſit x numerus valde exiguus.

Exemplum.

Sit n numerus nummorum quos uterque Colluſorum habeat = 10. Sit etiam $x = 76$. Si ſumatur pro Q primus terminus & negligantur cæteri, invenietur probabilitas certaminis finiendi intra ludos non plures quam 76 ad probabilitatem non finiendi ut 50747 ad 49235, ſi vero ſumatur pro Q termini duo priores neglectis cæteris, invenietur ratio probabilitatum ut 50743 ad 49247.

Coroll-

Corollarium II.

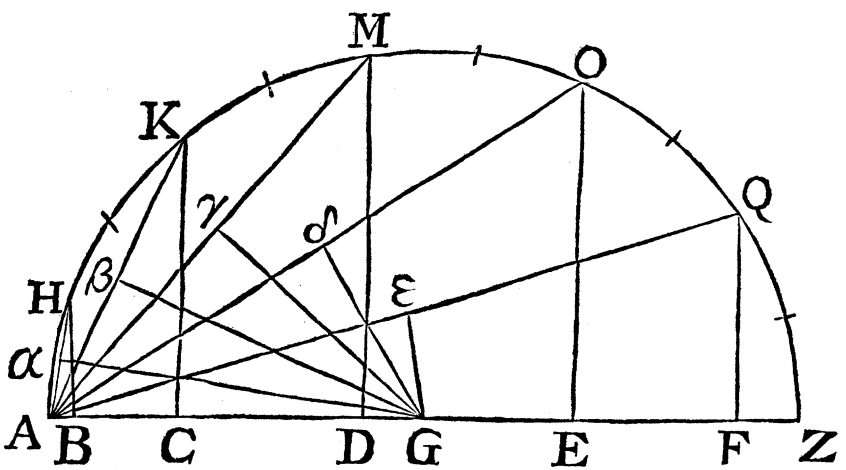
Invenire quotenis ludis, probabilitates certaminis finiendi & non finiendi erunt æquales.

Solutio.

Ponatur pro Q Terminus unicus $\frac{HB^{x+1}}{AB^{\frac{1}{2}x+1}}$, fiatque $2^{\frac{1}{2}x-1} n - Q = Q$. Et posito n maximo numero invenietur, $x = 0.756\, nn$ proxime, aliquanto major quam $\frac{3}{4}nn$.

Casus Secundus.

Sit n numerus impar, ponaturque a ad b habere rationem æqualitatis.



Centro G, intervallo G A describatur semicircumferentia A M Z quæ dividatur in tot partes æquales, quot sunt

ſunt unitates in n; tunc ex primo H, tertio K, quinto M, & impari quoque diviſionis termino, demittantur ad diametrum perpendicula HB, KC, MD, OE, QF &c. ex diametri extremitate A, primo ſcilicet arcui contermina, ducantur ſubtenſæ AH, AK, AM, &c. ad quas e Centro G ducantur perpendicula $G\alpha$, $G\beta$, $G\gamma$, $G\delta$, $G\varepsilon$, &c. ponatur $Q = \frac{BH^x \times G\alpha}{AB^{\frac{x+1}{2}}} - \frac{CK^x \times G\beta}{AC^{\frac{x+1}{2}}} + \frac{DM^x \times G\gamma}{AD^{\frac{x+1}{2}}} - \frac{EO^x \times G\delta}{AE^{\frac{x+1}{2}}} + \frac{FQ^x \times G\varepsilon}{AF^{\frac{x+1}{2}}}$ &c. quo facto, erit probabilitas certaminis finiendi intra ludos non plures quam x, ad probabilitatem non finiendi, ut $2^{\frac{x-3}{2}} n - Q$ ad Q accurate.

Corollarium I.

Si ſumatur pro Q terminus primus $\frac{HB^x \times G\alpha}{AB^{\frac{x+1}{2}}}$ neglectis cæteris, habebitur approximatio ſufficiens.

Exemplum.

Sit n numerus nummorum quos uterque Colluſorum habeat $= 45$. Sit etiam $x = 1519$. Sumatur pro Q terminus primus neglectis cæteris, & invenietur probabilitas certaminis finiendi intra ludos non plures quam 1519 ad probabilitatem non finiendi ut 49959 ad 50441, quæ proportio eſt vero proxima.

Corol-

Corollarium II.

Invenire quotenis ludis probabilitates certaminis finiendi & non finiendi erunt æquales.

Solutio.

Ponatur pro Q Terminus unicus $\frac{HB^{x} \times G\alpha}{AB^{\frac{x+1}{2}}}$, fiat-que $2^{\frac{x-3}{2}} n - Q = Q$; & posito n magno numero, invenietur $x = 0.756\, nn$ proxime aliquanto major quam $\frac{1}{4} nn$ contra quam sentiebat Clarissimus Monmortius.

Casus Tertius.

Positis cæteris ut in primo casu, sit a ad b ratio inæqualitatis (*vid. Fig.* 1.) Pone $\frac{a^n + b^n}{\overline{a+b}|^n} = L$, $\frac{\overline{a-b}|^2}{\overline{a+b}|^2} = d$, $\frac{ab}{\overline{a+b}|^2} = r$, Fac, $1, 2r :: \frac{HBq}{AB}, m :: \frac{CKq}{AC}, p :: \frac{MDq}{AD}, q :: \frac{OEq}{AE}, s :: \frac{QFq}{AF}, t.$

Pone $Q = \frac{HB}{2rAB + d} m^{\frac{1}{2}x} - \frac{CK}{2rAC + d} p^{\frac{1}{2}x} + \frac{MD}{2rAD + d} q^{\frac{1}{2}x}$ &c. quo facto erit probabilitas ludi finiendi intra ludos non plures quam x ad probabilitatem non finiendi ut $nr^{\frac{1}{2}n - 1} - 2LQ$ ad $2LQ$.

Corol-

Corollarium II.

Si ſumatur pro Q Terminus primus $\frac{HB}{2rAB+d}$ $m^{\frac{1}{2}x}$ neglectis cæteris, habebitur approximatio ſufficiens.

Caſus Quartus.

Poſitis cæteris ut iu ſecundo caſu, ſit *a* ad *b* ratio inæqualitatis (*vid. Fig.* 2.)

Pone quantitates L, *d*, *r*, *m*, *p*, *q*, *s*, *t*, &c. ut in tertio caſu.

Pone $Q = \frac{BH \times G\alpha}{2rAB+d} m^{\frac{x-1}{2}} - \frac{CK \times G\beta}{2rAC+d} p^{\frac{x-1}{2}} + \frac{DM \times G\gamma}{2rAD+d} q^{\frac{x-1}{2}}$ &c. quo facto erit probabilitas ludi finiendi intra ludos non plures quam x ad probabilitatem non finiendi ut $nr^{\frac{n-3}{2}} - 4LQ$ ad $4LQ$.

Corollarium.

Si ſumatur pro Q Terminus unicus $\frac{BH \times G\alpha}{2rAB+d}$ $m^{\frac{x-1}{2}}$ neglectis cæteris habebitur approximatio ſufficiens.

Quemadmodum in Progreſſione Geometricâ, Terminus quilibet ad proxime præcedentem habet rationem datam, ita ſunt aliæ Progreſſiones quæ ſic conſtitui poſſunt ut aſſumptis ad libitum Terminis duobus primis, Terminus quilibet ſubſequens ad duos proxime præcedentes habeat rationes datas, hujuſmodi eſt ſubjecta Series,

A B C D E F

$1 + 3x + 7xx + 17x^3 + 41x^4 + 99x^5$, &c. in qua

$C = 2Bx + 1Axx$

$D = 2Cx + 1Bxx$

$E = 2Dx + 1Cxx$

$F = 2Ex + 1Dxx$ &c.

Quantitates autem Numerales $2 + 1$ *simul sumptas subque propriis signis connexas appellare licet Indicem Relationis.*

Eodem modo constitui possunt series aliæ in quibus assumptis ad libitum Terminis tribus primis, Terminus quilibet subsequens ad tres proxime præcedentes habeat rationes datas; hujus generis est subjecta Series.

A B C D E F

$1 + 2x + 3xx + 10x^3 + 34x^4 + 97x^5$ &c. in qua

$D = 3Cx - 2Bxx + 5Ax^3$

$E = 3Dx - 2Cxx + 5Bx^3$

$F = 3Ex - 2Dxx + 5Cx^3$ &c.

Quantitates autem Numerales $3 - 2 + 5$ *simul sumptæ subque propriis signis connexæ, componunt Indicem Relationis.*

Sunt aliæ series in quibus Relatio fit ad quatuor, vel ad quinque, vel ad sex Terminos præcedentes, &c.

Series autem omnes hujus generis recurrentes appellare licebit propter Relationem Terminorum perpetuo recurrentem.

PROBLEMA II.

In seriebus recurrentibus, ex datis Terminis duobus primis, si relatio fiat ad duos præcedentes; vel datis

datis Terminis tribus primis, si relatio fiat ad tres præcedentes, &c. dato etiam indice relationis, invenire summam Terminorum quotlibet quorum numerus datus sit.

Problema solvitur in Tractatu nostro qui inscribitur, *The Doctrine of Chances.*

PROBLEMA III.

Assumptis ad libitum seriebus quotcunque recurrentibus; Terminisque, iisdem intervallis a principio serierum distantibus, in se invicem multiplicatis, invenire summam seriei ex hac multiplicatione resultantis.

INVESTIGATIO.

I° Proponantur series duæ, sitque $m + n$ Index Relationis in prima serie, atque $p + q$ Index Relationis in secunda, ex primo Indice $m + n$, formetur Æquatio $xx - mx - n = 0$, ex secundo Indice $p + q$, formetur Æquatio $yy - py - q = 0$, pone $xy = z$. Atque ope trium istarum Æquationum, expungantur x & y, & orietur Æquatio $z^4 - mpz^3 - mmqzz - mnpqz + nnqq = 0$. $\begin{array}{l} - npp \\ - 2nq. \end{array}$

in qua deleto primo termino z^4, mutatis signis omnibus, atque posito $z = 1$, obtinebitur Index Relationis, quo obtento, series resultans facile summabitur; II° eodem modo procedere licet, si dentur series tres vel quatuor &c. recurrentes.

Dum superiores paginæ prælo subjiciebantur, incidi fortuito in Acta Leipſ. *annorum* 1702 *&* 1703, *quibus comperi Cla.* Leibnitium *eadem fere methodo ante me usum fuisse qua hic utor in reducendis Fractionibus Algebraicis ad simpliciores, quod monitum velim ut a me avertam vel minimam suspicionem, aliena mihimet arrogare voluisse ; Propositio autem qua id præstitimus æque ac Propositio nostra tertia, ambæ deducuntur tanquam Corollaria ex altera Propositione maxime generali quam exhibuimus coram Regali Societate,* Maii 5° 1720 ; *Propositio sic se habet.*

Data serie quâvis recurrente quarum Termini quotlibet primi ad libitum sumantur ; dato etiam Indice Relationis Terminorum sequentium ad præcedentes, invenire Terminum quemlibet assignatum in hac serie, priusquam summa seriei sit cognita.

Qui autem rite perspexerit Solutionem Problematis hic adducti, is utique percipiet illam pendere a Propositione nostra generali, cujus demonstrationem simulque modum investigationis brevi spero publici juris faciam.

IV. *De-*