IV. "Sur une Equation Différentielle du 3me Ordre." By Prof. FRANCESCO BRIOSCHI. Communicated by W. SPOTTISWOODE, M.A., Treas. Roy. Soc. Received February 18, 1878.

1. Dans une note qui va paraître dans le Vol. IXme des "Annali di Matematica," et de laquelle j'ai l'honneur de présenter un exemplaire à part à la Société Royale, j'ai considéré l'équation différentielle linéaire du second ordre:

$$\frac{d^2y}{du^2}=\left[\frac{n(n+2)}{4}k^2sn^2u+h\right]y \;.\;.\;.\;.\;. \;(1)$$

étant h une constante, et n un nombre positif entier. Cette équation différentielle, qui pour n pair coincide avec celle que Lamé avait rencontrée dans ses études sur les surfaces isothermes, et à laquelle Mr. Hermite a dédié récemment ses importantes recherches, a la propriété très-rémarquable, pour le cas de n impair, d'être intégrable *algebriquement*. Soient y_1, y_2, deux intégrales particulières de l'équation différentielle (1); on a, comme il est connu, que:

$$y_2\frac{dy_1}{du}-y_1\frac{dy_2}{du}=\mathrm{C} \;.\;.\;.\;.\;. \;(2)$$

C constante, et en conséquence si l'on pose:

$$\eta=\frac{y_1}{y_2}$$

on aura l'équation différentielle du troisième ordre:

$$[\eta]_u+2\left(\frac{n(n+2)}{4}k^2sn^2u+h\right)=0 \;.\;.\;.\;.\;. \;(3)$$

ayant désigné avec Mr. Klein par $[\eta]_u$ l'expression:

$$\frac{d^2\log\dfrac{d\eta}{du}}{du^2}-\frac{1}{2}\left(\frac{d\log\dfrac{d\eta}{du}}{du}\right)^2$$

2. En posant:

$$x-e_1=(e_2-e_1)sn^2u$$
$$x-e_2=(e_1-e_2)cn^2u$$
$$x-e_3=(e_1-e_3)dn^2u$$

et $k^2=\frac{e_2-e_1}{e_3-e_1}$, on peut transformer l'équation différentielle (3) au moyen de la formule générale:

$$[\eta]_x=[u]_x+[\eta]_u\left(\frac{du}{dx}\right)^2$$

et l'on obtient après quelques réductions l'équation suivante:

$$[\eta]_x = \frac{1}{8\phi^2}[16\phi\psi - 4\phi\phi'' + 3\phi'^2] \ldots\ldots (4)$$

dans laquelle:

$$\phi = 4x^3 - g_2 x - g_3 = 4(x-e_1)(x-e_2)(x-e_3)$$

$$\psi = -\left[\frac{n(n+2)}{4}(x-e_1) + h(e_3-e_1)\right]$$

Cette équation différentielle (4), qui est de la forme de celle considerée il y a longtemps par Mr. Kummer dans ses recherches sur les séries hypergéométriques de Gauss, peut s'intégrer au moyen des résultats obtenus dans la note rappellée ci-dessus. En effet en posant $y_1 y_2 = v$, on déduit très-facilement de l'équation (2) que:

$$\frac{d\eta}{du} = \frac{C\eta}{v}$$

ou aussi:

$$\frac{1}{\eta}\frac{d\eta}{dx} = \frac{C}{v\sqrt{\phi(x)}}$$

Mais pour le cas de n pair $= 2m$, on a:

$$v = \zeta(x)$$

étant $\zeta(x)$, un polynome en x du dégré m, dont les coefficients sont des fonctions déterminées de h, e_1, e_2, e_3. On aura donc dans ce cas:

$$\eta = e^{CZ(x)}$$

ayant posé:

$$Z(x) = \int \frac{dx}{\zeta(x)\sqrt{\phi(x)}}$$

Dans le cas que n impair $= 2m+1$, on a:

$$v = \zeta(x)\sqrt{x-\xi},$$

$\zeta(x)$ étant encore un polynome en x du dégré m, et ξ une racine de l'équation $\phi(x)=0$, c'est-à-dire $\xi = e_1, e_2, e_3$. Dans ce cas en posant $\phi(x) = (x-\xi)\mu(x)$, on aura:

$$Z(x) = \int \frac{dx}{\zeta(x)(x-\xi)\sqrt{\mu(x)}}$$

intégrable par des fonctions logarithmiques. En posant:

$$t_1(a) = \sqrt{\mu(x)} - \sqrt{\mu(a)} - 2(x-a)$$

$$t_2(a) = \sqrt{\mu(x)} + \sqrt{\mu(a)} - 2(x-a)$$

on a ainsi pour n impair :

$$\eta=\left(\frac{t_1(\xi)}{t_2(\xi)}\right)^{\frac{1}{2}}\Pi_5\frac{t_1(x_s)}{t_2(x_s)}$$

où x_s est une racine de l'équation $\zeta(x)=0$.

3. Si dans l'équation (4) on suppose :

$$h(e_3-e_1)=\frac{n(n+2)}{4}e_1$$

ou :

$$h=-\frac{n(n+2)}{12}(1+k^2)$$

et $g_2=0$, l'équation même devient :

$$[\eta]_x=\frac{x}{2(4x^3-g_3)^2}[(n^2+2n+24)g_3-4(n-1)(n+3)x^3].$$

Soit $x^3=\frac{1}{4}g_3z$, on aura :

$$[\eta]_x=\frac{x}{2g_3(1-2)^2}[n^2+2n+24-(n-1)(n+3)z]$$

et

$$[x]_z=\frac{4}{\eta}\frac{1}{z^2}$$

en conséquence l'équation de transformation :

$$[\eta]_z=[x]_z+[\eta]_x\left(\frac{dx}{dz}\right)^2$$

donnera :

$$[\eta]_z=\frac{1-\lambda^2}{2z^2}+\frac{1-\nu^2}{2(1-z)^2}-\frac{\lambda^2-\mu^2+\nu^2-1}{2z(1-z)}$$

étant :

$$\lambda=\frac{1}{3},\ \mu=\frac{n+1}{6},\ \nu=\frac{1}{2}$$

On en déduit que en posant :

$$\alpha=\frac{n+2}{12},\ \beta=-\frac{n}{12},\ \gamma=\frac{2}{3}$$

on aura :

$$\eta=\frac{\mathrm{F}(\alpha,\beta,\gamma,z)}{\mathrm{F}(\alpha,\beta,\alpha+\beta-\gamma+1,1-z)}$$

désignant par $\mp$ une série hypergéométrique.

Ces séries sont donc exprimables, dans le cas que j'ai ici considéré, par la fonction $\mathrm{Z}(x)$ introduite supérieurement.

Analoguement si l'on suppose $g_3=0$, on trouvera en posant :

$$g_2^z=4x^2,$$

pour α, β, γ les valeurs suivantes :

$$\alpha=\frac{n+2}{8},\quad \beta=-\frac{n}{8},\quad =\frac{2}{3}$$