XXIII. "Sur la Surface de l'Onde, et Théorèmes relatifs aux Lignes de Courbure des Surfaces du Second Ordre." Par A. Mannheim. Communicated by The President. Received June 16, 1881.

Après avoir présenté quelques remarques sur la surface de l'onde, je montrerai dans cette courte note, comment l'emploi d'une simple proposition de *géométrie cinématique* permet de trouver des résultats nouveaux et intéressants à propos d'un sujet déjà bien étudié.

§ I.

A un ellipsoïde donné de centre o, *on circonscrit des cônes dont une section principale est un angle droit : les sommets de ces cônes sont sur une surface de l'onde* [c].

Cette génération de la surface de l'onde, que j'ai communiquée à l'Académie des Sciences (26 Avril, 1880), va me servir de point de départ.

Appelons c le sommet d'un de ces cônes, ca, cb, les deux génératrices perpendiculaires l'une à l'autre dont le plan est une section principale de ce cône ; a et b les points de contact de ces génératrices et de l'ellipsoïde donné.

Considérons les trois surfaces du second degré homofocales à l'ellipsoïde donné qui passent par le sommet c.

On sait que ces surfaces sont respectivement tangentes en c aux plans principaux du cône ou, ce qui revient au même, les normales à ces surfaces en ce point sont les axes principaux de ce cône.

Parmi ces surfaces il y a un ellipsoïde. Nous le désignerons par (E) ; il coupe la surface de l'onde, suivant une courbe E. La normale en c à cet ellipsoïde est la bissectrice $c\beta$ de l'angle droit $a\,c\,b$.

La normale en c à la surface de l'onde est, comme je l'ai démontré, la droite $c\mu$, qui joint le point c au milieu μ de la corde de contact $a\,b$.

Le plan $a\,c\,b$ est alors le plan normal en c à la courbe E ; par suite la droite G élevée du point c perpendiculairement au plan $a\,c\,b$ est la tangente en c à cette courbe ; et l'on sait que la droite G, l'un des axes principaux du cône circonscrit, est aussi l'un des axes de l'indicatrice de l'ellipsoïde (E) au point c.

Ceci est vrai pour un point quelconque de E ; nous voyons alors que :

La surface de l'onde [c] *est coupée par un ellipsoïde* (E) *homofocal à l'ellipsoïde qui entre dans la définition précédente, suivant une ligne de courbure de cet ellipsoïde* (E).

Comme cette ligne de courbure est l'intersection de l'ellipsoïde (E)

et d'un hyperboloïde homofocal, ce théorème s'applique aussi à cet hyperboloïde.

Considérons maintenant l'autre hyperboloïde homofocal, celui qui est tangent en c au plan $a\,c\,b$ ou, ce qui revient au même, dont la normale en c est la droite G. Appelons (c) l'intersection de cet hyperboloïde et de la surface de l'onde. Projetons l'ellipsoïde donné sur le plan $a\,c\,b$. Nous obtenons ainsi une ellipse de contour apparent, tangente en a et b aux côtés de l'angle droit $a\,c\,b$. Le centre de cette ellipse est un point de $c\mu$, mais ce centre est la projection du centre o de l'ellipsoïde donné donc *le plan* (G, $c\,\mu$) *contient le centre* o *de l'ellipsoïde donné.*

La droite G est la normale à l'hyperboloïde, et la droite $c\mu$ est la normale à la surface de l'onde. Le plan de ces deux droites est alors normal en c à l'intersection de (c) de ces deux surfaces. Mais, comme nous venons de le voir, ce plan contient o, donc co est normale à cette courbe d'intersection. Ainsi, les droites partant de o, et qui s'appuient sur (c), rencontrent cette courbe à angle droit; donc:

La courbe (c) *est une ligne sphérique.*

Les droites $c\mu$ et G étant perpendiculaires l'une à l'autre, l'hyperboloïde et la surface de l'onde se coupent en c à angle droit; et comme ceci est vrai pour un point quelconque de (c) nous voyons que :

Le long de la ligne sphérique (c), *la surface de l'onde et l'hyperboloïde se coupent à angle droit.*

Cette courbe sphérique (c) est du quatrième ordre; elle n'est pas alors l'intersection complète de l'hyperboloïde et de la surface de l'onde. La partie restante de cette intersection est une courbe du quatrième ordre, lieu du sommet d'angles droits tels que $a\ c\ b$, mais dont le plan est normal à l'hyperboloïde: cette courbe est alors une ligne de courbure de cette hyperboloïde.

Ce que nous disons pour cet hyperboloïde est applicable à l'autre, et l'on voit que:

Les hyperboloïdes homofocaux à l'ellipsoïde, qui entre dans la définition de la surface de l'onde, coupent chacun cette surface, suivant une ligne sphérique et une de leurs lignes de courbure.

La tangente en c à la courbe sphérique (c) est perpendiculaire au plan (G, $c\mu$), elle est alors perpendiculaire à G qui est la tangente à E. On voit donc que :

Les courbes telles que (c) *et* E *se rencontrent à angle droit.*

On peut dire aussi:

Les courbes sphériques (c) *suivant lesquelles la surface de l'onde* [c] *est coupée par des sphères concentriques ont, pour trajectoires orthogonales les courbes* E, * *suivant lesquelles cette surface est coupée par des ellipsoïdes homofocaux à celui qui entre dans la définition précédente.*

Le cône du second ordre, qui a pour sommet o et pour directrice (c),

* Les courbes E sont les *courbes ellipsoïdales* de Lamé.

a pour plan tangent le long de *oc* un plan perpendiculaire au plan (G, $c\mu$). Mais ce plan (G, $c\mu$) est tangent au cône du second ordre dont la directrice est E.

Donc :

Les cônes du second ordre de sommet o, *et qui ont pour directrices des courbes telles que* (c) *et* E, *se coupent à angle droit.*

On peut dire que la droite G est la projection de *oc* sur le plan tangent en *c* à la surface de l'onde, et qu'alors, au moyen de la projection de *oc*, on obtient la tangente en *c* à la ligne de courbure E. Appliquons cette remarque :

Le cône de sommet *o*, dont la directrice est (*c*), a pour plan tangent le long de *oc*, un plan perpendiculaire au plan (*o*, $c\mu$) normal en *c* à la surface de l'onde. Ce plan tangent, en vertu d'un théorème connu, est alors le plan normal à la surface de l'onde au point γ, où le rayon *oc* rencontre cette surface. Il coupe le plan tangent en γ à la surface de l'onde, d'après la remarque précédente, suivant la tangente en ce point à une ligne de courbure de l'ellipsoïde homofocal à l'ellipsoïde donné, et qui contient γ. On voit ainsi que :

Le cône de sommet o, *et dont la directrice est* (c), *rencontre de nouveau la surface de l'onde, suivant une courbe telle que* E.

On démontre facilement la proposition inverse.

En rapprochant les résultats précédents de ceux trouvés par MM. W. Roberts et Massieu, au moyen de l'équation de la surface de l'onde en co-ordonnées elliptiques, on voit que l'ellipsoïde, qui entre dans ma définition de la surface de l'onde, fait partie des surfaces homofocales qui interviennent dans cette équation.

§ II.

Jusqu'à présent j'ai considéré une surface de l'onde et des ellipsoïdes homofocaux. Nous allons maintenant prendre un ellipsoïde fixe et une série de surfaces [c'] analogues à la surface de l'onde. Nous verrons que ces surfaces coupent aussi cet ellipsoïde suivant des lignes de courbure; nous obtiendrons alors une nouvelle génération des lignes de courbure des surfaces du second ordre. *Les surfaces* [c′] *sont le lieu des sommets de cônes circonscrits à un ellipsoïde donné, et dont une section principale est égale à un angle donné arbitrairement.*

Appelons $c'\,a'$, $c'\,b'$ les deux génératrices, qui forment une section principale du cône circonscrit de sommet c', comprenant entr'elles l'angle donné : les points a' et b' étant les points de contact de ces génératrices et de l'ellipsoïde donné. On peut dire que *la surface* [c′] *est le lieu du sommet d'un angle de grandeur constante* a′ c′ b′, *circonscrit à l'ellipsoïde donné, et dont le plan est normal à cet ellipsoïde en chacun des points de contact* a′ *et* b′.

En partant de cette définition et en faisant usage d'une simple

proposition de *géométrie cinématique*, cherchons d'abord la normale en c' à la surface $[c']$.

Pour un déplacement de l'angle de grandeur constante $a'\ c'\ b'$, le foyer du plan de cet angle est à la rencontre f des normales élevées des points a' et b' à l'ellipsoïde donné. Comme la position de ce foyer est indépendante du déplacement de l'angle mobile, nous en concluons que *la droite* c' f *est la normale en* c' *à la surface* [c'].

La bissectrice de l'angle a' c' b' *est toujours la normale en* c' *à un ellipsoïde* (E) *homofocal à l'ellipsoïde donné et qui contient* c'. Le plan de ces deux normales, c'est-à-dire le plan de l'angle mobile, est alors le plan normal en c' à la ligne d'intersection de (E) et de $[c']$. La tangente à cette courbe d'intersection est alors, comme précédemment, l'un des axes principaux du cône de sommet circonscrit à l'ellipsoïde donné et aussi l'un des axes de l'indicatrice de (E) en c'. Ceci est vrai pour un autre point tel que c'; nous avons alors ce théorème curieux:

Un angle de grandeur constante, circonscrit à un ellipsoïde donné et dont le plan est normal à cette surface en chacun des points de contact des côtés de cet angle, se déplace de façon que son sommet reste sur l'ellipsoïde(E) *homofocal à l'ellipsoïde donné: ce sommet décrit une ligne de courbure de* (E).*

Ce théorème subsiste si les côtés de l'angle mobile touchent respectivement des ellipsoïdes homofocaux, le plan de cet angle restant toujours normal à ces ellipsoïdes.

On peut encore dire inversement :

Par une tangente à une ligne de courbure d'un ellipsoïde on mène deux plans qui touchent respectivement un ellipsoïde homofocal à celui-ci: l'angle compris entre ces plans est de grandeur constante, quelle que soit cette tangente.

XXIV. "On certain Definite Integrals." No. 9. By W. H. L. Russell, F.R.S. Received June 16, 1881.

Continuing the investigations given in the last paper, we have:—

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \theta d\theta \{\epsilon^{2i\theta} f(\cos\theta\epsilon^{i\theta}) - \epsilon^{-2i\theta} f(\cos\theta\epsilon^{-i\theta})\} = \pi i \phi \tfrac{1}{2} \quad . \quad . \quad . \quad (176),$$

when $\phi(x) = \int dx f(x)$.

$$\int_0^{\pi} \theta d\theta \{\epsilon^{i\theta} f(\epsilon^{i(\theta+\pi)}) - \epsilon^{-i\theta} f(\epsilon^{-i(\theta+\pi)})\} = 2\pi i \phi(1) \quad . \quad . \quad (177),$$

when $\phi(x) = \int dx f(x)$ as before.

* On peut remarquer que la ligne de courbure ainsi décrite rencontre toujours à angle droit le plan de l'angle mobile.